多変量解析におけるある種の検定統計量の漸近分布について (統計的漸近理論)

藤越, 康祝

数理解析研究所講究録
167巻 1972年 20-35

多変量解析におけるある種の検定統計量の漸近分布について

神大 教養　　藤越 康祝

§1. 序

次の4つの仮説検定問題に対する尤度比統計量の漸近分布を調べる：

(i) MANOVA モデルにおける次元に関する検定,

(ii) GMANOVA モデルにおける(i)と同様な検定,

(iii) 正準相関係数に関する有意性検定,

(iv) 共分散行列の小さい方の q 個の固有根についての等質性検定.

上記検定問題は，特別な場合として，

(i)′ MANOVA モデルにおける線型仮説の検定,

(ii)′ GMANOVA モデルにおける(i)′と同様な検定,

(iii)′ 2組の変数間の独立性検定,

(iv)′ Sphericity 検定,

を含んでいる．後者に対する尤度比統計量の仮説，および，

対立仮説のもとでの漸近展開はすでに求められている．この報告では前者の仮説検定問題に関心があり，特別な場合の結果についてはふれないことにする．総合報告的な見地から整理しているが，(ii), (iii) に対する尤度比基準の導出，それらの仮説のもとでの極限分布，および，全般にわたっての対立仮説のもとでの極限分布の導出は新しい結果と思われる．

§2. 準備

極限分布を求めるとき，次の補題をしばしば用いている．

補題 1. (Rubin [14]).　$V_n = h_n(U_n)$ は確率変数 U_n のベクトル値関数で，次の条件をみたすとする．

(1) U_n は U に法則収束する（以後，$U_n \Rightarrow U$ とかく）．

(2) $u_n \to u$ のとき，

$$h_n(u_n) \to h(u) \quad \text{on } D^c \equiv \{\, h(u) \text{の連続点} \,\},$$

(3) $P_r\{ U \in D \} = 0$.

このとき，

$$V_n \Rightarrow V \equiv h(U) .$$

上記結果の比較的簡単な証明は Anderson [3] にある．距離空間への拡張は Topsoe [16]，および，その別証は Billingsley

[4] を参照されたし.

対称行列 $S\ (p\times p)$ の p.d.f. が

$$\pi^{-p(p+1)/4}\ 2^{-p/2}\ e^{-\operatorname{tr} S^2/2}$$

で与えられるとき，S の固有根 $l_1 \geq \cdots \geq l_p$ の p.d.f. は

$$D_1(l_1, \cdots, l_p : p) \equiv 2^{-p/2} \prod_{\alpha=1}^{p} \Gamma[\tfrac{1}{2}(p-\alpha+1)]\ e^{-\frac{1}{2}\sum l_i^2} \prod_{i<j} (l_i - l_j)$$

である.

S がウィシャート分布 $W_p(I, m)$ $(m>p)$ に従うとき，S の固有根 $l_1 \geq \cdots \geq l_p > 0$ の p.d.f. は

$$D_2(l_1, \cdots, l_p : p, m) \equiv [\ 2^{mp/2}\, \Gamma_p[p/2]\, \Gamma_p[m/2]\ ]^{-1} \pi^{p^2/2}$$
$$\cdot\ e^{-\frac{1}{2}\sum l_i} \prod l_i^{(m-p-1)/2} \prod_{i<j} (l_i - l_j)$$

である.

対称行列 $W(p\times p)$ の分布が次のように定められるとき，$W \sim D_3(w\,;\, p, \lambda_g, a_g, k)$ とかく.

$$W = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} W_{11} & \cdots & W_{1k} & W_{1k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ W_{k1} & \cdots & W_{kk} & W_{kk+1} \\ W_{k+1\,1} & \cdots & W_{k+1\,k} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} a_1 \\ \\ a_k \\ a_{k+1} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} a_1 & \quad & a_k & a_{k+1} \end{array} \end{array}$$

(1) W_{gg} の $\begin{cases} \text{対角元} \sim N[0,\ 4\lambda_g] \\ \text{その他} \sim N[0,\ 2\lambda_g] \end{cases}$, $g=1,\cdots,k$

(2) W_{eg} の各元 $\sim N[0,\ \lambda_e+\lambda_g]$, $e \neq g$
$e,g=1,\cdots,k$

(3) $W_{g\,k+1}$ の各元 $\sim N[0,\ \lambda_g]$, $g=1,\cdots,k$

(4) W の相異なる元は互に独立.

§3. MANOVA モデルにおける検定

観測行列 $Y(N\times p)$ の各行は互に独立に $N_p[\cdot,\Sigma]$ に従い, $EY=A_1(N\times k)\Xi(k\times p)$ とする. A_1 は既知で $r(A_1)=k$, Ξ は未知のパラメーター. このとき, $M\equiv A_3(u\times k)\Xi$ (A_3 は既知で $r(A_3)=u$) に関する次の検定問題を考える.

$$H_{01}\ :\ r(M)=r \quad \text{against} \quad H_{11}\ :\ r(M)>r$$

仮説は"Mの各行ベクトルが原点を通る r 次元平面(未知)上にある"ことを意味する. 以下, Σ が未知の場合を扱う. 次の標準型から出発してよい: $Z(N\times p)$ の各行は互に独立に $N_p[\cdot,\Sigma]$ に従い,

$$EZ = E\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}\begin{matrix} u \\ k-u \\ N-k \end{matrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

とする．仮説検定問題は H_{01} : $r(\zeta_1)=r$ against H_{02} : $r(\zeta_1)>r$ である．

定理1．H_{01} の H_{11} に対する尤度比基準（L.R.C.）は

$$T_1 = \{(1+\theta_{r+1})\cdots(1+\theta_s)\}^{-N/2}$$

である．ここに，$s=\mathrm{Min}(p,u)$，$S_h=Z_1'Z_1$，$S_e=Z_3'Z_3$，$\theta_1\geq\cdots\geq\theta_s>0$ は $S_hS_e^{-1}$ の固有根．

$A_3=[0, I_u]$ の場合の証明は Anderson [2] にある．著者は別の方法により定理1を得た．著者の方法は検定問題(ii)，(iii) に対しても有効である．この報告は分布に関する結果に中心をおいており，それらの導出法は省略する．

補題2．$S_hS_e^{-1}$ の固有根の分布を扱うとき，

(1) $S_e \sim W_p(I, n)$，$n=N-k$，

(2) $S_h \sim W_p(I, u; \Omega)$，$\Omega$ は対角行列で，対角要素は $\Sigma^{-1}\zeta_1'\zeta_1$ の固有根よりなる，

(3) S_e と S_h は互に独立．

としてよい.

上の補題はよく知られている. さて, Nが大のときの T_1 の分布を調べるのであるが次の仮定は実際的である.

仮定(I) ; u, p, k fix,

$$\Omega = n\Lambda_n = O(n)$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \lambda_1(n) I_{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(n) I_{a_k} \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1(n) > \cdots > \lambda_k(n) > 0$$

$n \to \infty$ のとき,

$\lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0$

以下において, $b_g = a_1 + \cdots + a_g$, $b_0 = 0$, $a_{k+1} = p - b_k$ なる記号を用いる.

補題3. (Hsu [8])

$$\phi_i = \sqrt{n}\,(2\lambda_g^2 + 4\lambda_g)^{-1/2}\,[\,\theta_i - \lambda_g(n)\,], \quad i = b_{g-1}+1, \cdots, b_g \quad g = 1, \cdots, k$$

$$\phi_i = n\,\theta_i, \qquad i = b_k+1, \cdots, s$$

とおく, 仮定(I)のもとで, $\phi_1, \cdots, \phi_s$ の極限分布は

$$D_1(\phi_1, \cdots, \phi_{b_1}; a_1) \cdots D_1(\phi_{b_{k-1}+1}, \cdots, \phi_{b_k}; a_k) D_2(\phi_{b_k+1}, \cdots, \phi_s; s-b_k, t-b_k)$$

である. ただし, $t = \mathrm{Max}(p, u)$.

上記結果において，固有ベクトルの極限分布を含めた型での証明は Anderson [1] を参照されたし．仮定 (I) のもとで，次の結果をうる．

定理 2．(Anderson [2])．H_{01} のもとで，

$$-2\log T_1 \Longrightarrow \chi^2_{(p-r)(u-r)} .$$

定理 3．$b_\beta = r$ とする．対立仮説のもとで，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-2\log T_1 + N\log \prod_{g=\beta+1}^{k}[1+\lambda_g(n)]^{a_g}\right\}$$

の極限分布は $N[0, \sigma_1^2]$ である．$\sigma_1^2 = 2\sum_{g=\beta+1}^{k} a_g[1-(1+\lambda_g)^{-2}]$．

なお，仮定 (II)；u, p, k fix，$\Omega = O(1)$ のもとで，$\phi_i = \theta_i/n$，$i=1,\cdots,s$ とおくと，$\phi_1 \geq \cdots \geq \phi_s > 0$ の極限分布は，

$$D_4(\phi_1,\cdots,\phi_s; \omega_i, s, t) \equiv D_2(\phi_1,\cdots,\phi_s; s, t)$$
$$\cdot \operatorname{etr}(-\tfrac{1}{2}\Omega)\, {}_0F_1(\tfrac{s}{2}; \tfrac{1}{4}(\omega_1,\cdots,\omega_s), (\phi_1,\cdots,\phi_s))$$

となる (C.f. James [10])．$\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1,\cdots,\omega_s)$．この場合，$T_1$ の極限分布を求めることは困難である．

§4. GMANOVA モデルにおける検定

前節において，$EY = A_1 \Xi(k\times q) A_2(q\times p)$ なるとき，$M \equiv A_3 \Xi A_4 (q\times v)$ に関する次元についての検定問題を考える．ここに，A_2 , A_4 は既知で，$r(A_2)=q$, $r(A_4)=v$ とする．

この問題の標準型は次のようになる(c.f. Gleser & Olkin [7])．

$Z(N\times p)$ の各行は独立で $N_p[\cdot,\Sigma]$ に従い，

$$E\,Z = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} u \\ k-u \\ N-k \end{array} \\ \begin{array}{ccc} q-v & v & p-q \end{array} & \end{array} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & 0 \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする．仮説検定問題は， $H_{02} : r(\zeta_{12}) = r$ *against* $H_{12} : r(\zeta_{12}) > r$ である．

定理4. H_{02} の H_{12} に対する L.R.C. は

$$T_2 = \left\{ (1+\hat\theta_{r+1}) \cdots (1+\hat\theta_{\hat s}) \right\}^{-N/2}$$

で与えられる．ここに， $\hat s = \mathrm{Min}\,(v, u)$, $\hat\theta_1 \geq \cdots \geq \hat\theta_{\hat s} > 0$ は $\hat S_h \hat S_e^{-1}$ の固有根， $\hat S_e = Z_{32}'[I - Z_{33}(Z_{33}'Z_{33})^{-1}Z_{33}']Z_{32}$,

$\hat S_h = [Z_{12} - Z_{13}(Z_{33}'Z_{33})^{-1}Z_{33}'Z_{32}]'[I + Z_{13}(Z_{33}'Z_{33})^{-1}Z_{13}']^{-1}[Z_{12} - Z_{13}(Z_{33}'Z_{33})^{-1}Z_{33}'Z_{32}]$.

補題4. (Fujikoshi [6]). $\hat S_h \hat S_e^{-1}$ の固有根の分布を扱うとき，

(1) $\hat S_e \sim W_v(I, n)$, $n = N - k - (p-q)$,

(2) Z_{13}, Z_{33} が与えられたとき，$\tilde{S}_h \sim W_v(I, u\,;\Delta)$,

ここに，$\Delta = \Omega^{\frac{1}{2}}[I + Z_{13}(Z_{33}'Z_{33})^{-1}Z_{13}']^{-1}\Omega^{\frac{1}{2}}$,

$\Omega^{\frac{1}{2}}(v \times u)$ は対角元が $\Sigma_{22\cdot3}^{-1/2}\zeta_{12}'\zeta_{12}$ の固有根の平方根，その他は 0 の行列，

(3) $\tilde{S}_e$，$\tilde{S}_h$ は条件つきのもとで互に独立，

(4) Z_{13}, Z_{33} の各元は互に独立に $N[0, 1]$ に従う.

としてよい.

T_2 の N が大のときの分布を調べるにあたつて，次の仮定をおく.

仮定(III)；p, k（従って，u, v, q）fix

$\Omega = \Omega^{\frac{1}{2}}\Omega^{\frac{1}{2}\prime}$ に対して仮定(I)を仮定，

ただし，$v - b_h = a_{h+1}$.

このとき，$W \equiv \sqrt{n}(S_R/n - \Lambda_n)$ の極限分布が，$D_3(w\,; v, \lambda_g, a_g, h)$ に注意して次の結果をうる.

補題 5.

$$\hat{\varphi}_i = \sqrt{n}\,(2\lambda_g^2 + 4\lambda_g)^{-1/2}(\hat{\theta}_i - \lambda_g(n)), \quad i = b_{g-1}+1, \cdots, b_g, \quad g = 1, \cdots, h$$

$$\hat{\varphi}_i = n\hat{\theta}_i, \quad i = b_h+1, \cdots, \hat{s}$$

とおく. 仮定(III)のもとで，$\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_{\hat{s}}$ の極限分布は

$$D_1(\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_{b_1};a_1)\cdots D_1(\tilde{\varphi}_{b_{h-1}+1},\cdots,\tilde{\varphi}_{b_h};a_h)D_2(\tilde{\varphi}_{b_h+1},\cdots,\hat{\varphi}_{\hat{s}};\hat{s}-b_h,\hat{t}-b_h)$$

となる．ただし，$\hat{t}=\mathrm{Max}\,(v,u)$．

仮定(Ⅲ)のもとで，次の結果をうる．

定理 5． H_{02} のもとで，

$$-2\log T_2 \Longrightarrow \chi^2_{(v-r)(u-r)} \quad .$$

定理 6． $b_\beta=r$ とする． H_{12} のもとで，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[-2\log T_2 + N\log\prod_{g=\beta+1}^{h}\{1+\lambda_g(n)\}^{a_g}\right]$$

の極限分布は $N[0,\sigma_2^2]$ である． $\sigma_2^2=2\sum_{g=\beta+1}^{h}a_g[1-(1+\lambda_g)^{-2}]$．

§5．正準相関係数に関する検定

$\begin{pmatrix}x_\alpha\\y_\alpha\end{pmatrix}\begin{matrix}p\\q\end{matrix}$ ，$\alpha=1,\cdots N$ を $N_{p+q}\left[\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\right]$ からの

標本とする($p\leq q$)． 母集団正準相関係数 $\hat{\rho}_1\geq\cdots\geq\hat{\rho}_p\geq 0$

に関する仮説検定問題，

$$H_{03} : \tilde{\rho}_{k+1} = \cdots = \tilde{\rho}_p = 0 \quad against \quad H_{13} : \tilde{\rho}_{k+1} > 0$$

を考える．

定理 7. H_{03} の H_{13} に対する L.R.C. は

$$T_3 = \{ (1 - r_{k+1}^2) \cdots (1 - r_p^2) \}^{N/2}$$

である．ここに，$r_1 \geq \cdots \geq r_p \geq 0$ は標本正準相関係数．

補題 6. (Constantine [5]). $r_1^2 \geq \cdots \geq r_p^2 \geq 0$ の分布は $| S_h - r^2 (S_h + S_e) | = 0$ の根の分布と同一である．ここに，

(1) $S_e \sim W_p (I, n-q)$, $n = N-1$,

(2) $Y(q \times n)$ が与えられたとき，$S_h \sim W_p(I, q ; \Delta)$,

$$\Delta = MY'YM', \qquad M(p \times q) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\rho}_1}{\sqrt{1-\tilde{\rho}_1^2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\tilde{\rho}_p}{\sqrt{1-\tilde{\rho}_p^2}} \end{bmatrix},$$

(3) S_e と S_h は独立（条件つきの意味で），

(4) $Y'Y \sim W_q (I, n)$,

$\hat{\rho}_1 \geq \cdots \geq \hat{\rho}_p \geq 0$ は次のような重複性をもつとする.

仮定(IV) ; q (従って p) fix

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{\rho}_p^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho_1^2 I_{a_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \rho_k^2 I_{a_k} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\rho_1^2 > \cdots > \rho_k^2 > 0 .$$

補題7. (Hsu [9])

$$\eta_i = \sqrt{n}\ [2\rho_g(1-\rho_g^2)]^{-1}[r_i^2 - \rho_g^2] , \quad \begin{array}{l} i = b_{g-1}+1, \cdots, b_g \\ g = 1, \cdots, k \end{array}$$

$$\eta_i = n r_i^2 , \quad i = b_k+1, \cdots, p$$

とおく. $\eta_1, \cdots, \eta_p$ の極限分布は次式で与えられる.

$$D_1(\eta_1, \cdots, \eta_{b_1} ; a_1) \cdots D_1(\eta_{b_{k-1}+1}, \cdots, \eta_{b_k}) D_2(\eta_{b_k+1}, \cdots, \eta_p ; p-b_k, q-b_k) .$$

上記結果は, $\sqrt{n}\,(S_R/n - MM') \equiv W$ とおくとき, Wの極限分布が $D_3(w ; p, [(1-\rho_g^2)^{-2}-1]/2, a_g, k)$ であることに注意して, 補題5と同様に証明できることを注意しておく. 仮定(IV)のもとで, 次の結果をうる.

定理8. 仮説 H_{03} のもとで,

$$-2\log T_3 \Longrightarrow \chi^2_{(p-k)(q-k)} .$$

定理 9. $\ell_\beta = k$ とする．対立仮説のもとで，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[-2\log T_3 + N\log \prod_{g=\beta+1}^{k}\{1-\rho_g^2\}^{a_g}\right]$$

の極限分布は $N[0, \sigma_3^2]$ である． $\sigma_3^2 = 4\sum_{g=\beta+1}^{k} a_g \rho_g^2$ ．

仮説の近傍における分布を調べるとき，次の仮定をおく．

仮定(V)； q fix， $\hat{\rho}_i^2 = n\omega_i^2$ ， $\omega_i = O(1)$

このとき， $nr_i^2 = \phi_i$ ，とするとき， $\phi_1 \geq \cdots \geq \phi_p$ の極限分布は $D_4(\phi_1, \cdots, \phi_p; \omega_i, p, q)$ である．この場合， T_3 の極限分布を求めるのは困難である．

§6. 共分散行列の固有根に関する検定

$X_1, \cdots, X_N$ を $N_p(\mu, \Sigma)$ からの標本， S と Σ の通常の不偏推定量， $\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_p > 0$ を Σ の固有根， $d_1 \geq \cdots \geq d_p \geq 0$ を S の固有根とし，仮説検定問題，

$$H_{04} ; \delta_{k+1} = \cdots = \delta_p \quad \text{against} \quad H_{14} : \text{not } H_{04}$$

を考える.

定理10.（Anderson [3]）. H_{04} の H_{14} に対する L.R.C. は

$$T_4 = \left[d_{k+1} \cdots d_p / \{ (d_{k+1} + \cdots + d_p)/q \}^q \right]^{N/2}$$

で与えられる. ただし, $q = p - k$.

$\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_p > 0$ の重複性について,

仮定（VI）；
$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{a_k} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0, \quad p \ \text{fix}$$

とする.

補題8.（Anderson [3]）.

$$\psi_i = \sqrt{n} (\sqrt{2}\lambda_g)^{-1} (d_i - \lambda_g), \quad \begin{matrix} i = k_{g-1}+1, \cdots, k_g \\ g = 1, \cdots, k \end{matrix}, \quad n = N-1,$$

とおく. $\psi_1, \cdots, \psi_p$ の極限分布は次式で与えられる.

$$D_1(\psi_1, \cdots, \psi_{k_1}; a_1) \cdots D_1(\psi_{k_{k-1}+1}, \cdots, \psi_p; a_k)$$

定理11.（Anderson [3]）. H_{04} のもとで,

$$-2 \log T_4 \Longrightarrow \chi^2_{\frac{1}{2}(q-1)(q+2)}.$$

34

定理 12．　$b_\beta = k$ とする．対立仮説のもとで，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left[-2\log T_4 + N\log\left\{\prod_{g=\beta+1}^{k}\lambda_g^{a_g}\Big/\left(\sum_{g=\beta+1}^{k}a_g\lambda_g/q\right)^{q}\right\}\right]$$

の極限分布は $N[0, \sigma_4^2]$ である．$\sigma_4^2 = 2q\left[q\sum_{\beta+1}a_g\lambda_g^2\Big/\left(\sum_{\beta+1}a_g\lambda_g\right)^2 - 1\right]$．

§ 7．仮説のもとでの漸近展開

Lawley [12], [13] は T_1, T_3, T_4 に対して，統計量 $-2B_i\cdot\log T_i$ を考え，B_i の検討を標本における固有根と母集団における根との対応がほとんど確実であるほど n が大として，かつ，仮説のもとで行っている．たとえば，T_4 に対して，$NB_4 = n - k - (2q+1+2/q)/6 + \delta^2\sum_{i=1}^{k}(\delta_i - \delta)^{-2}$ と B_4 を定義することにより，$E[-2B_4\log T_4] = \frac{1}{2}(q-1)(q+2) + O(n^{-\frac{3}{2}})$ を得ている．ただし，$\delta_{k+1} = \cdots = \delta_p = \delta$．一方，*James* [11] も別な観点から同様な結果を与えている（T_4 に対してのみ）．従って，仮説のもとで，

$$P(-2B_4\log T_4 < x) = P(\chi^2_{\frac{1}{2}(q-1)(q+2)} < x) + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

が予想できる．

なお，統計量 T_1, T_3, T_4 の提案は *Bartlett*（文献は *Siotani* [15] を参照されたし）により繰返し述べられていることを注意しておく．

References

[1] Anderson, T. W. (1951). The asymptotic distribution of certain characteristic roots and vectors. Proc. Second Berkely Symp. on Math. Statist. and Prob. 103-130.

[2] Anderson, T. W. (1951). Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions. Ann. Math. Statist. 22 327-351.

[3] Anderson, T. W. (1963). Asymptotic theory for pricipal component analysis. Ann. Math. Statist. 34 122-148.

[4] Bilingsley, P. (1968). Covergence of Probability Measure. Wiley, New York.

[5] Constantine, A. G. (1963). Some non-central distribution problem in multivariate analysis. Ann. Math. Statist. 34 1270-1285.

[6] Fujikoshi, Y. (1972). Monotonicity of the power functions of some tests in general MANOVA models. Ann. Math. Statist. in press.

[7] Gleser,E. L. and Olkin, I. (1970). Linear models in multivariate analysis. Essays in Probability and Statistics 267-292.

[8] Hsu, P. L. (1941). On the limiting distribution of the roots of a determinantal equation. J. London Math. Soc. 16 183-194

[9] Hsu, P. L. (1941). On the limiting distribution of the canonical correlations. Biometrika 32 38-45.

[10] James. A. T. (1964). Distributions of the matrix variates and latent roots derived from normal samples. Ann. Math. Statist. 35 475-501.

[11] James, A. T. (1969). Tests of equality of latent roots of the covariance matrix. In " Multivariate Analysis" (P. R. Krishnaiah ed.). Academic Press, New York.

[12] Lawley, D. N. (1956). Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. Biometrika 43 128-136.

[13] Lawley, D. N. (1969). Tests of significance in canonical analysis. Biometrika 46 59-66.

[14] Rubin, H. (1951). Topological properties of measures on topological spaces. Unpublished.

[15] Siotani, M. (1961). The recent progress in the theory of multivariate analysis. Proc. Inst. Statist. Math. 8 95-142.

[16] Topsoe, F. (1967). Preservation of weak convergence under mapping. Ann. Math. Statist. 38 1661-1665.